

Ejercicio 1. Sea el campo vectorial $\bar{f}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\bar{f}(x,y,z) = (e^{\cos(z)}, y, sen(xy))$ y la superficie $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 2 - \sqrt{4 - x^2 - z^2}\}$. Calcular el flujo del campo $\bar{f}$ a través de S orientada con campo de normales con componente y negativa.

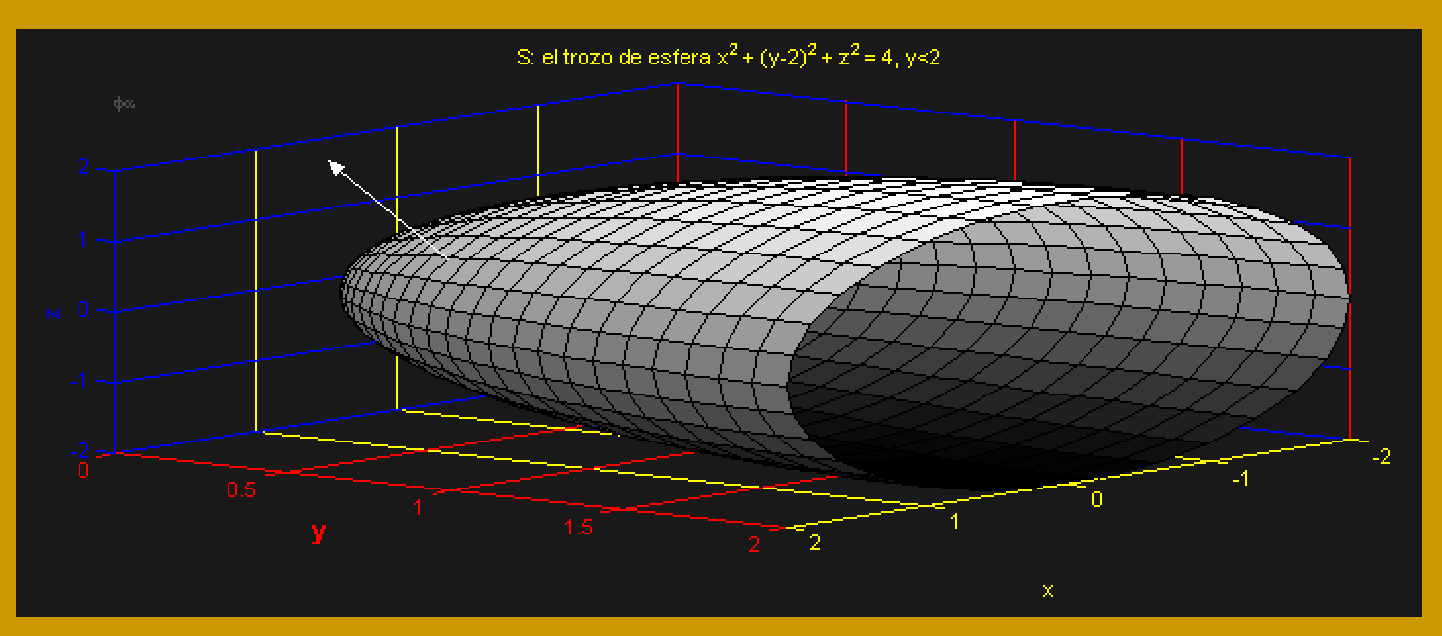


Figura 1. La semiesfera S y su orientación (prestar atención a las escalas de los ejes)

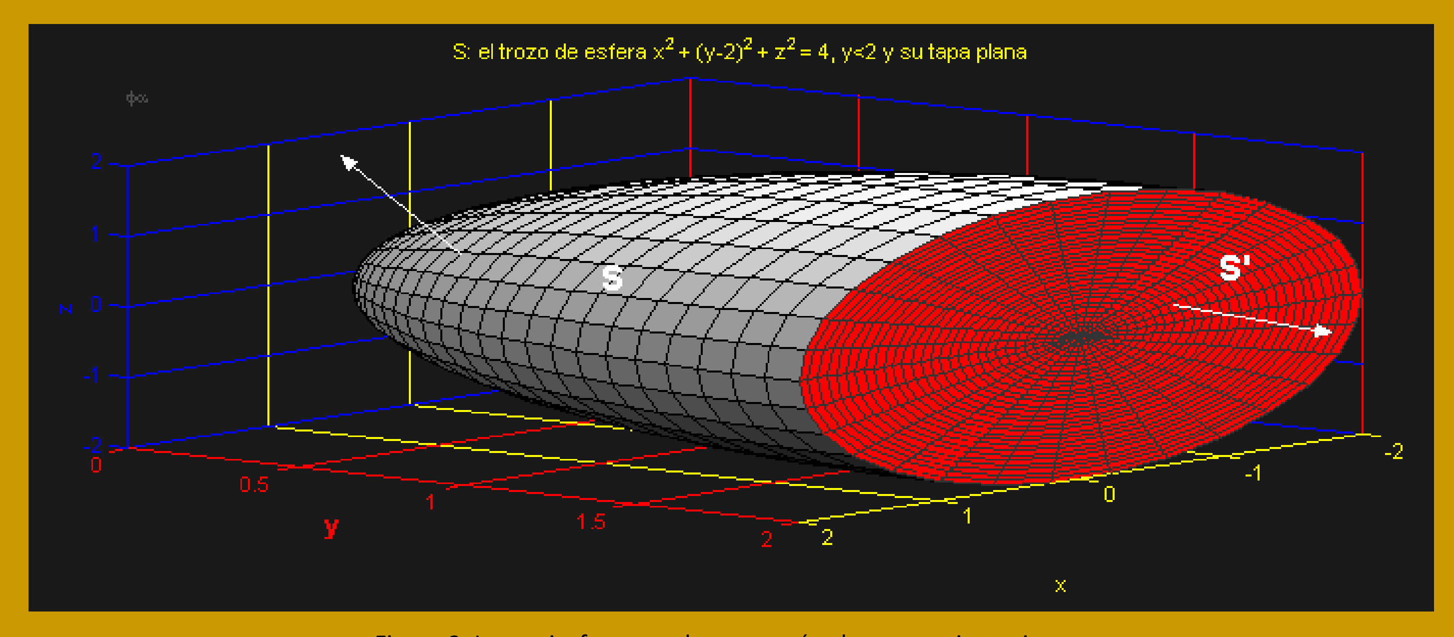


Figura 2. La semiesfera tapada con un círculo, y sus orientaciones

El cálculo del flujo del campo vectorial a través de S orientada como se indica en la figura 1, se simplifica formando el macizo $\mathcal{M} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2 - \sqrt{4 - x^2 - z^2} \leq y \leq 2\}$, cuya frontera es $S^* \overset{\text{def}}{=} S \cup S'$, siendo S' el círculo de radio 2 dado por $S' \overset{\text{def}}{=} \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 2, x^2 + z^2 \leq 4\}$, que actúa como tapa de la semiesfera El campo de normales de S' es claramente constante, y lo orientamos con N'(x, 2, z) = (0, 1, 0), y entonces por el teorema de Gauss[i] es $\iint_{S^*} \bar{f} \cdot \check{n}\, dS = \iint_S \bar{f} \cdot \check{n}\, dS + \iint_{S'} \bar{f} \cdot \check{n}\, dS = \iiint_{\mathcal{M}} div(\bar{f}) dV$, de donde $\iint_S \bar{f} \cdot \check{n}\, dS = \iiint_{\mathcal{M}} div(\bar{f}) dV - \iint_{S'} \bar{f} \cdot \check{n}\, dS$. Pero como la

[i] Dejamos aquí al lector el trabajo específico de justificar por qué el teorema es aplicable en este caso (esto significa, dar cuenta que los objetos S*, el campo vectorial y el macizo $\mathcal{M}$ cumplen efectivamente las hipótesis que aseguran su validez. Se admite conocido teorema: para un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$, de clase C^1 en un abierto simplemente conexo que contiene a una superficie cerrada S* regular por partes, simple y orientada con normal saliente, el flujo del campo a través de S* coincide con la integral triple de su divergencia en la región M de la que S* es frontera. Las hipótesis pueden debilitarse, y la dimensión del espacio ampliarse, resultando teoremas más generales; puede verse una presentación introductoria en Lang, S. (1990). pp. 442-458. El teorema de Gauss (también suele llamársele 'teorema de la divergencia') se encuentra presentado de modo simple en (Santaló 1993, §21,156-166). En (Kurtis 1979, §10.6, 465-472) el tratamiento es sencillo y de fácil lectura, como también en (Marsden y Tromba 1991, §8.4, 528-541, Apostol 1980, §12.19, 557-567). En (Rey Pastor, Pi Calleja y Trejo 1968, §92,516-526) se tiene una presentación algebraica completa con abundantes comentarios y ejercicios, además de algunas aplicaciones físicas (en §93).



divergencia del campo es constantemente 1, $\iiint_{\mathcal{M}} div(\bar{f})dV = \iiint_{\mathcal{M}} dV$ es el volumen de $\mathcal{M}$ (una semiesfera maciza de radio 2), que es ½ (4/3)π(2)³ = 16π /3. En cuanto a la integral de superficie, siendo $\bar{f} \cdot \check{n} = (e^{\cos(z)}, 2, sen(2x)) \cdot (0,1,0) = 2$, se tiene que $\iint_{S'} \bar{f} \cdot \check{n}\, dS = 2\iint_{S'} dS = 2\, área(S') = 8\pi$. Entonces queda $\iint_{S} \bar{f} \cdot \check{n}\, dS = \iiint_{\mathcal{M}} div(\bar{f})dV - \iint_{S'} \bar{f} \cdot \check{n}\, dS = -\frac{8}{3}\pi$.

Ejercicio 2. Sea C la curva definida por la intersección de las superficies de ecuaciones $x^2 + z^2 = 16, y + z = 4$ con $y \leq 2$, y sea g una función escalar C[1](ℝ). Calcular la circulación a largo de C del campo vectorial dado por $\bar{f}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\bar{f}(x,y,z) = \left(-\frac{z}{x^2+z^2}, g(y), \frac{x}{x^2+z^2}\right)$, indicando claramente la orientación elegida para la curva.

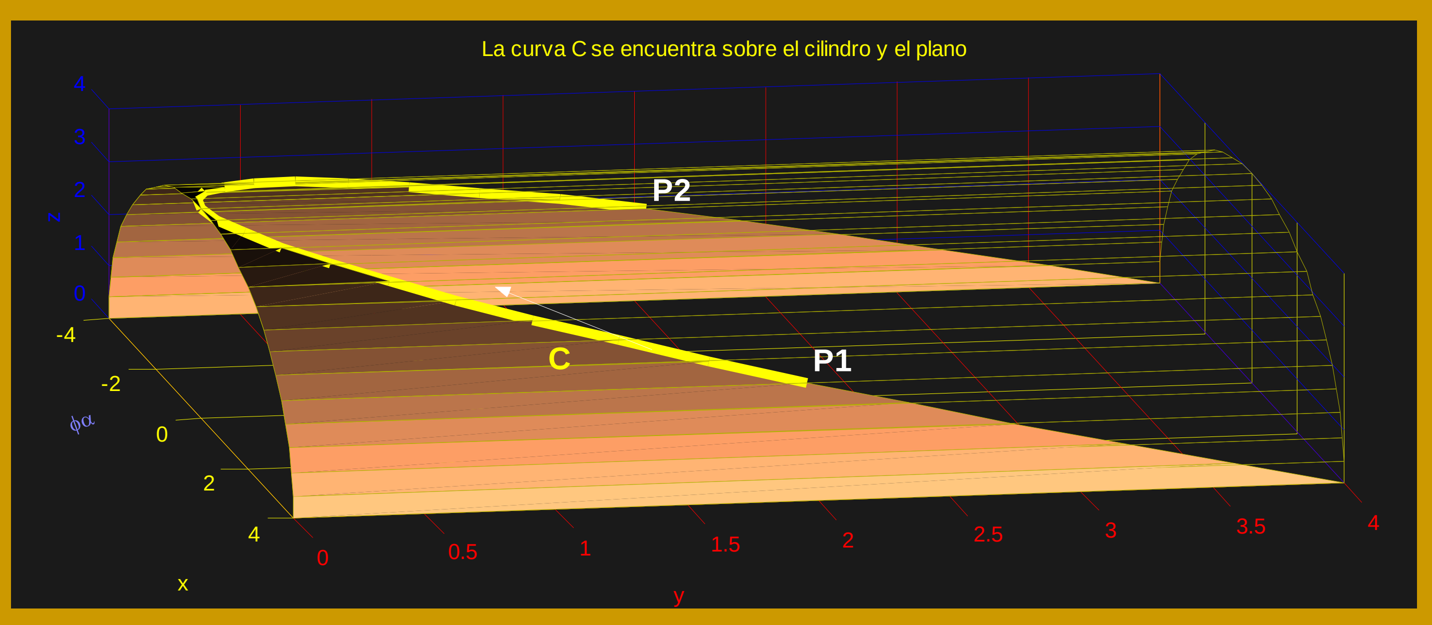


Figura 3. Muestra la curva plana C (en amarillo) contenida en el cilindro, recorrida desde el punto P1 hasta el punto P2

φα

Son múltiples las maneras de resolver este problema. Esbozamos dos, con algún comentario valorativo.

Una primera resolución, hallando una función potencial del campo. En el abierto simplemente conexo[ii] $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$, el campo vectorial es irrotacional [ver que $\forall (x,y,z) \in D : \nabla \times \bar{f}\,(x,y,z) = (0,0,0)$], por lo tanto el campo es el gradiente de una función potencial[iii] $\Phi: D \to \mathbb{R}^3$ tal que $\Phi(x,y,z) = -\operatorname{atan}\left(\frac{x}{z}\right) + h(y)$, siendo la función escalar h tal que $h' = g$ (una primitiva de g, que existe por ser continua en ℝ[iv]). En efecto, $\nabla\Phi(x,y,z) = \left(-\frac{z}{x^2+z^2}, h'(y), \frac{x}{x^2+z^2}\right) = \left(-\frac{z}{x^2+z^2}, g(y), \frac{x}{x^2+z^2}\right) = \bar{f}(x,y,z)$; se sobreentiende en esta identidad que el campo vectorial está restringido a D. Entonces la circulación pedida no depende de $C \subset D$, sino sólo de los puntos[v] $P_1 = (2\sqrt{3}, 2, 2)$ y $P_2 = (-2\sqrt{3}, 2, 2)$ y entonces resulta que la circulación es, de modo inmediato, dada por[vi]:

$$\int_C \bar{f} \cdot \bar{dl} = \int_C \nabla\Phi \cdot \bar{dl} = \Phi(P_2) - \Phi(P_1) = -\operatorname{atan}(-\sqrt{3}) + h(2) + \operatorname{atan}(\sqrt{3}) - h(2) = 2\ \operatorname{atan}(\sqrt{3}) = 2\frac{\pi}{3}$$

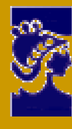
[ii] ¿Por qué es necesario definir D? ¿Podría ser todo ℝ[3] exceptuado el eje y? ¿Podría reemplazarse z > 0 por z > 1? Responder cuidadosamente estas preguntas ayuda más que leer la resolución del ejercicio.

[iii] El conocido problema de recuperar la función potencial conocido el campo de gradientes puede resolverse de diversas formas, entre las cuales está la que se presenta aquí. Es conveniente consultar la bibliografía acerca de este punto tan esencial a la ingeniería. Por ejemplo, pueden verse ejemplos y fundamentos del procedimiento aquí expuesto en (Rey Pastor, Pi Calleja y Trejo 1968, §89.3, 491-492, Santaló 1993, §23.2, 175-177, Marsden y Tromba 1991, §8.3, 518, 522, teorema 7 y ejemplo1); alternativamente, y menos directos modos pueden verse en (Apostol 1980, §10.17,418-419, ejemplos 2 y 3). Si se llama $P(x,y,z) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{z}{x^2+z^2}$; $Q(x,y,z) \stackrel{\text{def}}{=} g(y)$; $R(x,y,z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{x}{x^2+z^2}$, es sabido que una función potencial se puede obtener con $\Phi(x,y,z) = \int_0^x P(t,0,0)dt + \int_0^y Q(x,t,0)dt + \int_1^z R(x,y,t)dt = -\operatorname{atan}\left(\frac{x}{z}\right) + h(y)$, siendo $h(y)$ una primitiva de g . Si para la existencia de una primitiva de g alcanza con su continuidad, ¿podría decir que la condición de que sea C[1] es excesiva? (La respuesta es no, de ninguna manera, indicar el motivo).

[iv] Toda función continua en [a, b] tiene una primitiva C[1] en (a, b), resultado que admitimos sabido. De lectura muy fácil y con dos argumentos diferentes que ayudan mucho a la intuición, está el sencillo texto de la profesora. Karel de Leeuw (asesinada por un alumno) (Leeuw 1984, 89-95). También puede ver en (Rey Pastor, Pi Calleja y Trejo 1969, §50.1, 677-678) y en el clásico (Apostol 1967, §2.18, 120-124) en el apartado que trata 'The integral as a function of the upper limit'.

[v] Poniendo $y = 2$ en las ecuaciones $x^2 + z^2 = 16, y + z = 4$, resultan las coordenadas de los puntos tal como se indican.

[vi] El resultado que admitimos conocido es el teorema fundamental del cálculo, en su versión n-D. Una presentación realmente sencilla, despejada y breve se tiene en (Apostol 1980, §10.11, 406-407) incluyendo una prueba del resultado de la independencia del camino. También en (Santaló 1993, §19.5, 140-141) se presenta en apenas un par de páginas lo esencial de la circulación de campos conservativos (ver la expresión 31 y sus comentarios).



Una segunda resolución, utilizando una curva alternativa. En lugar de hallar una función potencial del campo, podría aprovecharse que la circulación no depende de la curva sino sólo de sus extremos (ordenados), uniéndolos con una curva menos problemática que el trozo de elipse C. Una tal curva alternativa podría ser el arco de circunferencia C*, parametrizado por $\bar{\gamma}:\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]\to\mathbb{R}^3$ tal que $\bar{\gamma}(t)=(4\cos(t),2,4\sin(t))$, de modo que $\bar{\gamma}'(t)=(-4\sin(t),0,4\cos(t))$, y entonces la circulación queda

$$\int_C \bar{f}\cdot\bar{d}l=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\bar{f}(\bar{\gamma}(t))\cdot\bar{\gamma}'(t)\,dt=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\left(-\frac{\sin(t)}{4},g(2),\frac{\cos(t)}{4}\right)\cdot(-4\sin(t),0,4\cos(t))dt=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}dt=\frac{2\pi}{3}$$

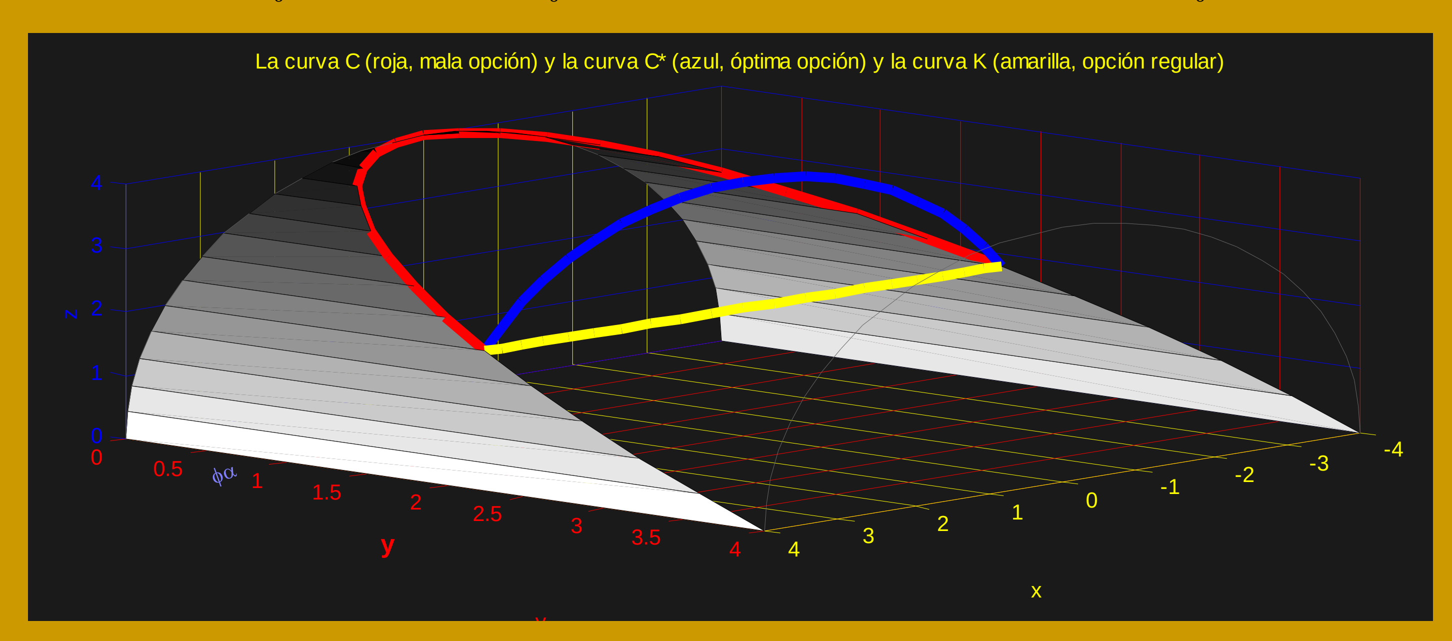


Figura 4. Tres curvas posibles (entre infinitas) para el cálculo de la circulación

Comentarios. También pudo elegirse, alternativamente la curva K que une los extremos de C con una recta; sin embargo, la integral que resulta es menos directa que la obtenida mediante la curva C* (en azul, en la figura 4). Si bien el trabajo material con cualquiera de estas dos curvas es menor que el necesario con la primera opción (pues allí debimos recuperar previamente la función potencial del campo vectorial), todavía sería preferible escogerla si, como es común, no se está interesado en resolver *un* problema específico, sino un juego de problemas. Esto es, raramente estaremos interesados en la circulación sobre *una* curva de un campo de gradientes, sino que más probablemente estemos interesados en *todas* las circulaciones, a lo largo de *cualquier* ('razonable') curva[vii]. Pregunta final ¿cómo resolver este problema si la curva es una espiral plana que se enrolla sobre el eje y? Responderla cualitativamente.

Ejercicio 3. Calcular la masa de la superficie $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 9z^2=x^2+y^2, 0\le z\le 1, x\le y\}$, sabiendo que la densidad en cada punto es proporcional a la distancia al plano de ecuación z = 0.

Sabemos que[viii] $masa(S)=\iint_S \delta dS$, siendo $\delta(x,y,z)\stackrel{\text{def}}{=}kz$ con $k>0$. Luego para el cálculo basta con una parametrización de la superficie S, lo que puede hacerse en $\mathcal{R}_{uv}\stackrel{\text{def}}{=}\{(u,v)\in\mathbb{R}^2:\ \frac{1}{4}\pi\le u\le 5\pi/4,\ 0\le v\le 3\}$ siendo $S=\bar{T}(\mathcal{R}_{uv})$, con $\bar{T}:\mathcal{R}_{uv}\to\mathbb{R}^3$ tal que $\bar{T}(u,v)=(v\cos(u), v\,\mathrm{sen}(u), v/3)$, con campo de normales dado por el producto vectorial $\bar{N}(u,v)=\bar{T}_u(u,v)\times\bar{T}_v(u,v)=(v\cos(u)/3, v\,\mathrm{sen}(u)/3, -v)$[ix], vector cuya norma es $\|\bar{N}(u,v)\|=\frac{\sqrt{10}}{3}v$. Ahora todo se reduce al cálculo mismo de la masa, que resulta ser $\sqrt{10}k\pi$.

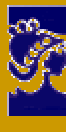
$$masa(S)=\iint_S \delta dS=\iint_{\mathcal{R}}\delta(\bar{T}(,v))\|\bar{N}(u,v)\|du\,dv=\frac{k}{3}\frac{\sqrt{10}}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}du\int_0^3 v^2\,dv=\sqrt{10}k\pi$$

---

vii He podido observar, con cierta desorientación, que algunos alumnos ¡han argumentado con el teorema de Stokes en este ejercicio! El teorema es totalmente innecesario e ineficiente, pues comprobada la irrotacionalidad del campo, es retorcido cerrar la curva, definir una superficie, aplicar el teorema, descontar el cierre y llegar, después de todo eso a… que puede calcularse por el camino alternativo, que es lo que se sabía del principio: ningún ingeniero se sentiría orgulloso de semejante desperdicio de recursos.

viii El problema de hallar la masa de una lámina es una de las aplicaciones más sencillas de las integrales de superficie de campos escalares, y pertenece a la misma familia del cálculo de baricentros, momentos estáticos, momentos de inercia, momentos centrífugos, todo inscriptos en el campo de la ingeniería civil. Ver, por ejemplo, (Apostol 1980, §12.7ejemplo 2, 525-526)

ix Es inmediato que esta parametrización es $C^\infty(\mathcal{R})$, y que la normal es sólo nula en el vértice del cono, de modo que se trata de una parametrización regular en casi todas partes de $\mathcal{R}$ (ya que deja de serlo sólo en un segmento de $\mathcal{R}$: contestar en cuál). Por otra parte, la parametrización es inyectiva en casi todas partes de $\mathcal{R}$ (creo un ejercicio muy instructivo la prueba de esta afirmación, siempre que lo haga uno mismo).



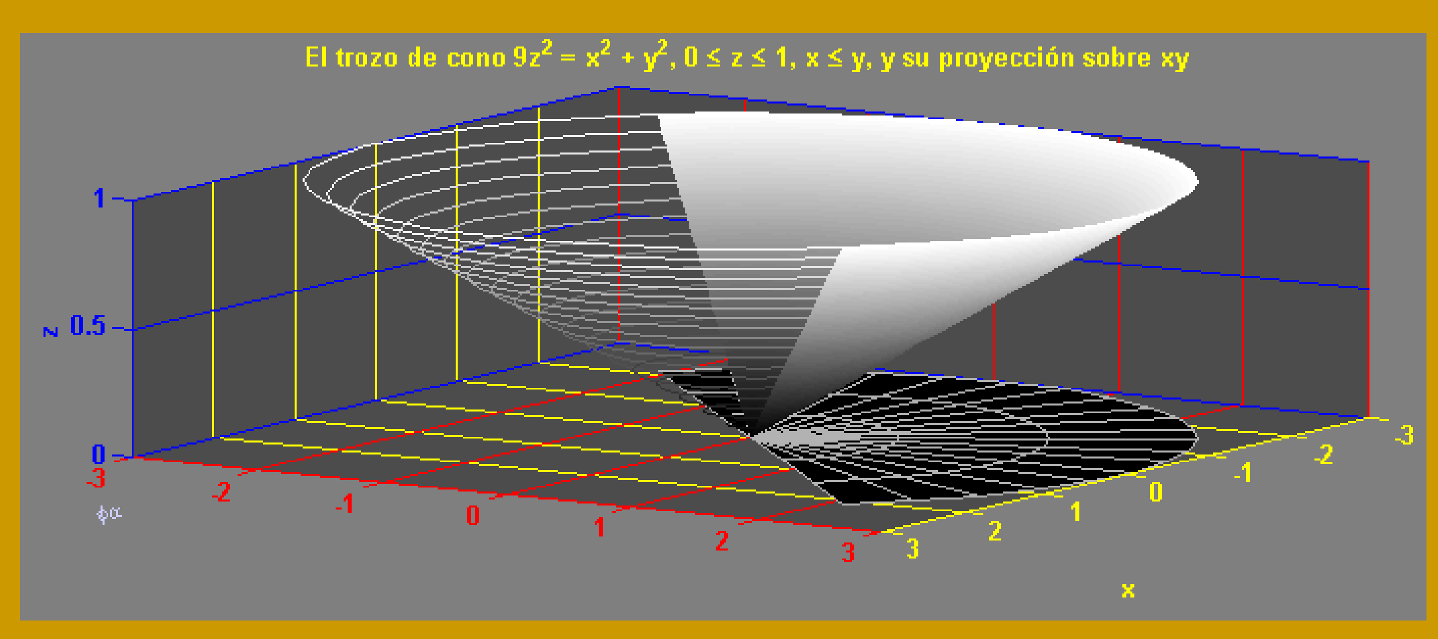
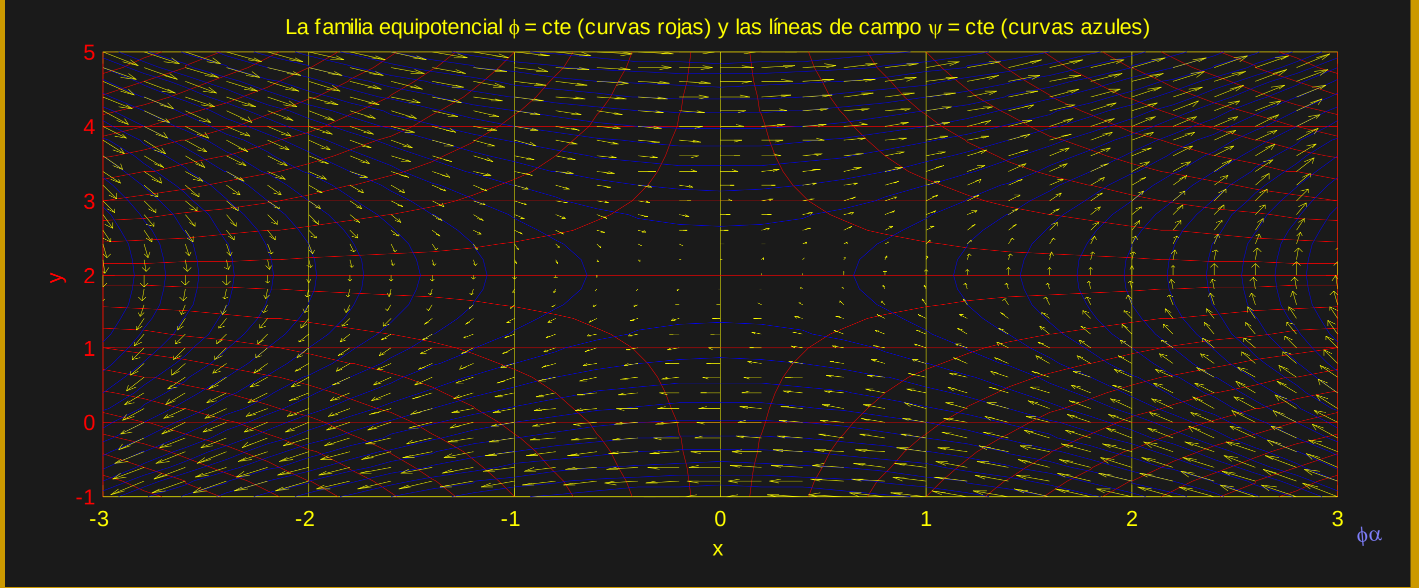


Figura 5. La porción de cono y el semicírculo que es su proyección sobre el plano z = 0

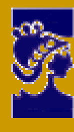
Ejercicio 4. Probar que $\bar{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\bar{f}(x, y) = (y - 2, x)$ es un campo de gradientes, hallar sus líneas de campo y demostrar que son la familia de trayectorias ortogonales a las equipotenciales del campo.

Probamos que es un campo de gradientes encontrando un campo escalar $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\bar{f} = \nabla\varphi$. Posiblemente alcance en este ejercicio tan sencillo con 'mirar fijo' el campo para escribir[x] $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x, y) = x\,(y-2)$. La familia de equipotenciales del campo tiene por ecuación $\varphi(x, y) = k$, con k tomando todos los valores reales, esto es la familia de hipérbolas $x\,(y-2) = k$. Para las líneas de campo, resolviendo la ecuación diferencial[xi] $dx/(y-2) = dy/x$ resulta la familia de hipérbolas de ecuación $x^2 - (y-2)^2 = c$, con c tomando todos los valores reales. Probar que las familias son ortogonales en cada punto que se intersecan, es equivalente a probar que se anula el producto escalar $\nabla\varphi\,(x, y) \cdot \nabla\psi\,(x, y)$, siendo el campo escalar $\psi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\psi(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} x^2 - (y-2)^2$. Veamos: $\nabla\varphi\,(x, y) \cdot \nabla\psi\,(x, y) = (y-2, x) \cdot (2x, -2\,(y-2)) = 0$, lo que prueba lo pedido.



[x] Si esto no fuera cierto, le bastará aplicar el procedimiento para recuperar la función potencial de un campo de gradientes, tal como se explicara más arriba en este mismo documento (y volver a leer los segmentos de libros de texto allí citados).

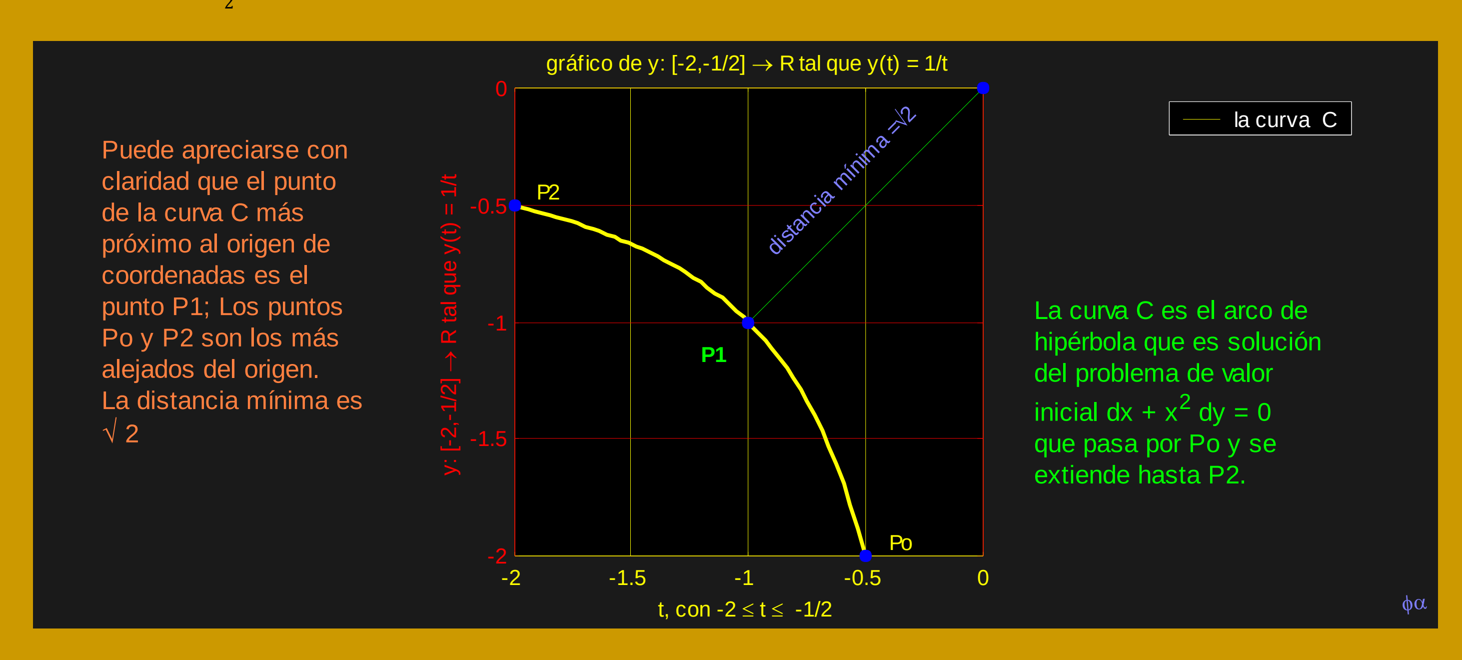
[xi] Se acepta conocida la definición de que $\bar{\gamma}(t)$ es una línea de flujo del campo vectorial $\bar{f}(P)$ en el punto P = $\bar{\gamma}(t)$ sii $\bar{f}(\bar{\gamma}(t)) = \bar{\gamma}'(t)$, que puede verse en, por ejemplo, Marsden, J. E., & Tromba, A. J. (1991). *Cálculo Vectorial* (Cuarta edición en español del original Vector Calculus, Third Edition. ed.). (M. López Mateos, & S. Adarve, Trads.) Wilmington, Delaware, EUA.: Addison-Wesley Iberoamericana, Capítulo 3, Funciones con valores vectoriales, §3.3, Campos vectoriales, p.216, definición. Una definición menos formal y más sugerente en (Santaló 1993, §14, 96-98), con la distinción entre líneas de campo y de corriente, en este ejercicio coincidentes al tratarse de un campo estacionario.



¿Es verdadero en este ejercicio que *cada* línea de campo es ortogonal a *todas* las equipotenciales que corta? Si hubiera una excepción, indicarla y decir claramente a cuántas equipotenciales no corta ortogonalmente y en qué punto suceden esas excepciones[xii].

Ejercicio 5. Hallar la solución $y: I \to \mathbb{R}$ del problema de valor inicial $dx + x^2\, dy = 0$, $y(-½) = -2$. Si C es la curva contenida en la gráfica de esa solución que pasa por $P_0 = (-½, -2)$, $P_2 = (-2, y(-2))$, determinar la distancia de C al origen de coordenadas.

La ecuación diferencial es de variables separables, y en el intervalo $I = (-\infty,0)$ es equivalente a $y' = -x^{-2}$ cuya solución general es $y(x) = x^{-1} + k$, con k real. Pero de la condición inicial resulta $k = 0$, de modo que la (única) solución del problema de valor inicial es $y: (-\infty,0) \to \mathbb{R}$ tal que $y(x) = x^{-1}$. La curva es, entonces, el arco de hipérbola equilátera dado por la expresión $C = \{(t, t^{-1}) \in \mathbb{R}^2: -½ \leq t \leq -2\}$. Basta esto para responder el problema, pues el punto más próximo es (suponemos evidentemente) $P_1 = (-1, -1)$, que ciertamente pertenece a C y cuya distancia al origen de coordenadas es $\sqrt{2}$. Sin embargo, si fingimos ignorarlo, podemos llegar a ese resultado buscando el mínimo de la función escalar[xiii] $f: [-½, -2] \to \mathbb{R}$ tal que $f(t) \stackrel{\text{def}}{=} t^2 + t^{-2}$ (esto es el cuadrado de la distancia de un punto de la curva al origen de coordenadas), cuya derivada es $f': (-½, -2) \to \mathbb{R}$ tal que $f'(t) = 2t - 2\,t^{-3} = 2t\,(1- t^{-4})$ que sólo es nula en el intervalo de análisis en $t_0 = -1$, tomando allí el valor $f(t_0) = 2$. Que se trata de un mínimo se sigue de que $f''(t) = 2 + 6\,t^{-4}$ es positiva en t_0 ($f''(t_0) = 8 > 0$). Por otro lado, en los extremos del intervalo es $f(-½) = f(-2) = 17/4$, que ciertamente es mayor que 2, de modo que $P_1 = (-1, -1)$ es el (único) punto de C cuya distancia $\sqrt{2}$ al origen de coordenadas es la mínima. Ya fuera de lo que el ejercicio pregunta, podemos acotar que los puntos P_0 y P_2 son los dos puntos de C más alejados del origen de coordenadas, y su distancia a él es $\frac{\sqrt{17}}{2}$.



🗝 **Bonus 1.** Si hubieran encontrado demasiado poco motivador un problema tan sencillo como éste, allí va otro, tomado de un librito maravilloso (Vasíliev y Gutenmájer 1980, §6.6, 117): Sea r una recta en el plano y A y B dos puntos del mismo lado de ésta. Hallar sobre la recta r un punto X tal que la suma de distancias d(A, X) + d(X, B) sea mínima. Puede resolverse de al menos dos muy lindas y sencillas formas (y de infinitas horribles), es un problema clásico y fundamental de la ingeniería (si piensan que la recta r es el perfil de un espejo, el camino AXB es el que sigue un rayo luminoso que parte de A hacia X para alcanzar B, en un medio homogéneo).

[xii] Particularmente didáctica es la presentación del problema de las trayectorias ortogonales en el texto de (Kreider, Kuller y Ostberg 1973, 354-358); menos detallado, pero con mayor cantidad de ejemplos, en el texto de (Zill 2007, §3.1, 81-84). Una discusión más precisa, en (Birkhoff y Rota 1989).

[xiii] Damos por sabido que el problema de extremar una función continua siempre tiene solución (esto es que la función alcanza su valor máximo (mínimo) en algún punto del compacto), y que si tales puntos son interiores y la función es allí diferenciable, entonces debe anularse la derivada primera. Además si f es en tal punto estacionario dos veces diferenciable, y la derivada segunda es positiva (negativa), el punto en cuestión le da un mínimo (máximo) a la función. Como el (los) extremos pueden alcanzarse en la frontera, deben controlarse allí sus valores respecto a los obtenidos, tal como se ha hecho en el texto. Para revisar estas cuestiones, puede leerse el muy preciso texto de (Browder 1996, §3.2, Theorem 3.14, 59) y también (Lang 1990, §2, 142), además de los textos clásicos de (Apostol 1967, Rey Pastor, Pi Calleja y Trejo 1969).



Comentario: en el enunciado del Bonus dice que los puntos están 'del mismo lado de la recta'. Es un buen ejercicio que intenten definir con precisión qué puede entenderse por esto (supongo que todos intuyen lo que pretende significar). Y que concluyan que la relación 'estar del mismo lado' es de equivalencia y que sólo hay dos clases de equivalencia bajo esta relación, clases que se llaman semiplanos. Sólo después de esto, concluimos eso que 'todo el mundo sabe': ¡una recta en el plano lo divide en dos semiplanos! Si alguno encuentra no del todo inútil todo esto y quiere saber de otro modo lo que todo el mundo 'sabe', puede empezar por leer un texto de una sencillez apabullante: (Postnikov 1982, Lecture 6, Defintions 2, 3 and proposition 1,60-62).

🕮 Bibliografía citada

Apostol, Tom. *Calculus volume I. One-Variable Calculus, with an introduction to linear algebra.* Segunda edición. Vol. II. II vols. New York: John Wiley & Sons, 1967.

—. *Calculus volume I. One-Variable Calculus, with an introduction to linearr algebra.* Segunda edición. Vol. II. II vols. New York: John Wiley & Sons, 1967.

—. *Calculus volumen 2. Cálculo con funciones de varias variables y álgebra lineal, con aplicaciones a las ecuaciones diferenciales y a las probabilidades.* Segunda edición en castellano [Original: Calculus II, Multi-variable calculus and linear algebra. with applications to differential equations and probabilty]. Traducido por Francisco Vélez Cantarell. Vol. II. 2 vols. Barcelona: Reverté, 1980.

Birkhoff, Garret, y Gian-Carlo Rota. *Ordinary Differential Equations.* Cuarta edición. Singapore: John Wiley & Sons, 1989.

Browder, Andrew. *Mathematical Analysis. An introduction.* Primera edición. New York: Springer Verlag, 1996.

Kreider, Donald, Robert Kuller, y Donald Ostberg. *Ecuaciones diferenciales.* Primera edición. Traducido por Federico Velasco Coba y Jorge Ludlow. New York: Fondo educativo interamericano, 1973.

Kurtis, Philip. *Cálculo de varias Variables con álgebra lineal.* Primera edición, primera reimpresión. Traducido por María Cristina Sangines de Salinas. México D.F.: Limusa, 1979.

Lang, Sege. *Introducción al Análisis Matemático.* Primera edición. [Original 1968, Undergrauate Analysis]. Traducido por Manuel López Mateos y Mario. Muñoz Mella. Wimington, Delaware.: Addison Wesley Iberoamericana., 1990.

Leeuw, Karen de. *Calculus.* Cuarta edición en castellano de la primera edición en inglés. [Original 1966: Calculus]. Traducido por Mario Rapaport. Buenos Aires: Eudeba, 1984.

Marsden, Jerrold E., y Anthony, J. Tromba. *Cálculo Vectorial.* Cuarta edición en español del original Vector Calculus, Third Edition. Traducido por Manuel López Mateos y Sergio Adarve. Wilmington, Delaware, EUA.: Addison-Wesley Iberoamericana, 1991.

Postnikov, M. *Lectures in geometry.* Primera edición en inglés de la edición original rusa de 1979. Traducido por Vladimir Shokurov. New York: Mir Publishers, 1982.

Rey Pastor, Julio, Pedro Pi Calleja, y César Trejo. *Análisis Matemático I. Análisis algebraico. Teoría de ecuaciones. Cálculo infinitesimal de una variable.* Octava edición. Vol. I. III vols. Buenos Aires: Kapelusz, 1969.

—. *Análisis Matemático II. Cálculo infinitesimal de varias variables. Aplicaciones.* Séptima edición. Vol. II. III vols. Buenos Aires: Kapelusz, 1968.

Santaló, Luis. *Vectores y tensores con sus aplicaciones.* Décimocuarta edición. Buenos Aires: Eudeba, 1993.

Vasíliev, N., y V. Gutenmájer. *Rectas y curvas.* Primera edición en castellano. Traducido por Margarita Gómez. Moscú: Mir, 1980.

Zill, Dennis. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado.* Segunda Edición en Castellano [Original 1968: A First Course in differential equations with applications]. Traducido por Eduardo Ojeda Peña y ÁLvaro Cofré Mata. México: Thomson, 2007.